在介绍用于计算沿灯光和照相机之间的光线路径的辐射率的积分器之前，我们将首先就其用于计算描述光散射的积分方程的解决方案的技术奠定基础。这些积分方程通常没有解析解，因此我们必须求助于数值方法。尽管诸如梯形积分或高斯积分之类的标准数值积分技术在求解低维平滑积分方面非常有效，但其在渲染中常见的高维和不连续积分的收敛速度很差。蒙特卡洛数值积分方法为这一问题提供了一种解决方案。他们使用随机性来评估积分，该积分的收敛速度与被积物的维数无关。在本章中，我们将从概率中回顾重要的概念，并为使用蒙特卡洛技术评估渲染中的关键积分奠定基础。明智地使用随机性已经彻底改变了算法设计领域。随机算法大致分为两类：拉斯维加斯和蒙特卡洛。拉斯维加斯算法是那些使用随机性但最终总是给出相同结果的算法（例如，选择随机数组条目作为Quicksort中的枢轴元素）。另一方面，Monte Carlo算法根据沿途使用的特定随机数给出不同的结果，但平均给出正确的答案。因此，通过平均几次Monte Carlo算法运行（在同一输入上）的结果，可以找到一个统计上非常有可能接近真实答案的结果。 Motwani和Raghavan（1995）对随机算法领域进行了出色的介绍。

蒙特卡洛积分是一种使用随机采样来估计积分值的方法.蒙特卡洛的一个非常有用的特性是,仅需要一种能力即可在域中的任意点上评估被积分数以便估算其积分的值.该特性不仅使Monte Carlo易于实现，而且使该技术适用于各种被积汉纳树，包括那些包含不连续性的被积函数.

渲染中出现的许多积分很难或无法直接评估.例如,要根据等式（5.9）计算某个点在某个表面上反射的光量,我们必须对单位球体上入射辐射率和BSDF的乘积进行积分.如何做到这一点目前尚不清楚:由于在现实场景中物体可见度的复杂且难以预测的效果,因此入射光辐射函数几乎永远无法以封闭形式使用.即使以封闭形式提供了入射辐射函数,通常也将无法进行分析积分.通过蒙特卡洛积分,可以简单地通过选择球体上的一组方向,计算沿它们的入射辐射率,乘以这些方向的BSDF值并应用加权项来估算反射辐射率.任意BSDF,光源描述和场景几何都易于处理.只需在任意点评估这些函数中的每一个.

蒙特卡洛的主要缺点是,如果使用n个样本来估计积分,则该算法将以的速率收敛到正确的结果.换句话说,为了将误差减半,有必要评估四倍的样本.在渲染中,每个样本通常要求在计算被积物的值的过程中追踪一条或多条光线,这在使用蒙特卡洛进行图像合成时要承担计算上昂贵的成本.在图像中,来自蒙特卡洛采样的伪像会表现为噪声-像素随机太亮或太暗.蒙特卡洛（Monte Carlo）当前有关计算机图形学的大多数研究都是关于尽可能减少此错误,同时最大程度地减少必须采集的其他样本的数量.

13.1 背景和概率回顾

13.2 蒙特卡洛估计量

13.3 采样随机变量

以上内容教材里都有

13.4 大都市抽样

Metropolis采样是一种根据非负函数生成一组样本的技术,与值成正比分布（Metropolis等人1953）.值得注意的是，它能够做到这一点而无需做任何其他事情。评估f的能力;不需要能够对f进行积分,对积分进行归一化以及对结果CDF求逆.此外,每次迭代都会产生一个从函数的PDF生成的可用样本； Metropolis采样不存在拒绝采样的缺点，即不能限制获取下一个采样所需的迭代次数。因此，与上一节介绍的技术相比，它可以从更广泛的功能中高效地生成样本。它构成了16.4节中实现的Metropolis轻型运输算法的基础.

Metropolis采样确实有一些缺点:序列中的连续样本在统计上相关,因此无法确保Metropolis生成的一小部分样本在整个域中分布良好.只有在大量样本的限制内,样本才能覆盖该域.因此,在使用大都市抽样时,分层抽样（第13.8.1节）等技术的方差降低优势通常不可用.

13.4.1 基础算法

更具体而言,Metropolis算法从函数生成一组样本,该函数在任意维状态空间(通常为)上定义,并返回实数,.首先选择第一个样本,然后通过对进行随机变异以计算建议样本,来生成每个后续样本.突变可以被接受或拒绝，因此被设置为或.当选择这些从一种状态到另一种状态的转换时,要满足一些要求(稍后描述),值的分布会达到平衡分布;这种分布是平稳分布.在极限条件下,样本集的分布与的概率密度函数成正比.

为了生成正确的样本分布,有必要生成建议的突变,然后接受或拒绝受到一些约束的突变. 假设我们有一个变异方法,建议从给定状态更改为新状态 (这可以通过以某种方式扰动甚至生成一个全新的值来完成）.我们必须能够计算出一个暂定的转移函数,该函数给出突变技术向转移的概率密度,假定当前状态为.(第13.4.2节将讨论过渡函数的设计.)

给定一个转移函数,可以定义一个接受概率,这给出了接受从到的拟议突变的概率,以确保样本分布与成正比.如果分布已经处于平衡状态,则任何两个状态之间的过渡密度必须相等:

此属性称为细节平衡.

由于设置了和,公式（13.6）告诉我们必须如何定义.特别是,定义的目标是使达到平衡的速率最大化.

从公式（13.7）立即注意到的一件事是,如果两个方向上的转移概率密度相同,则接受概率会简化为